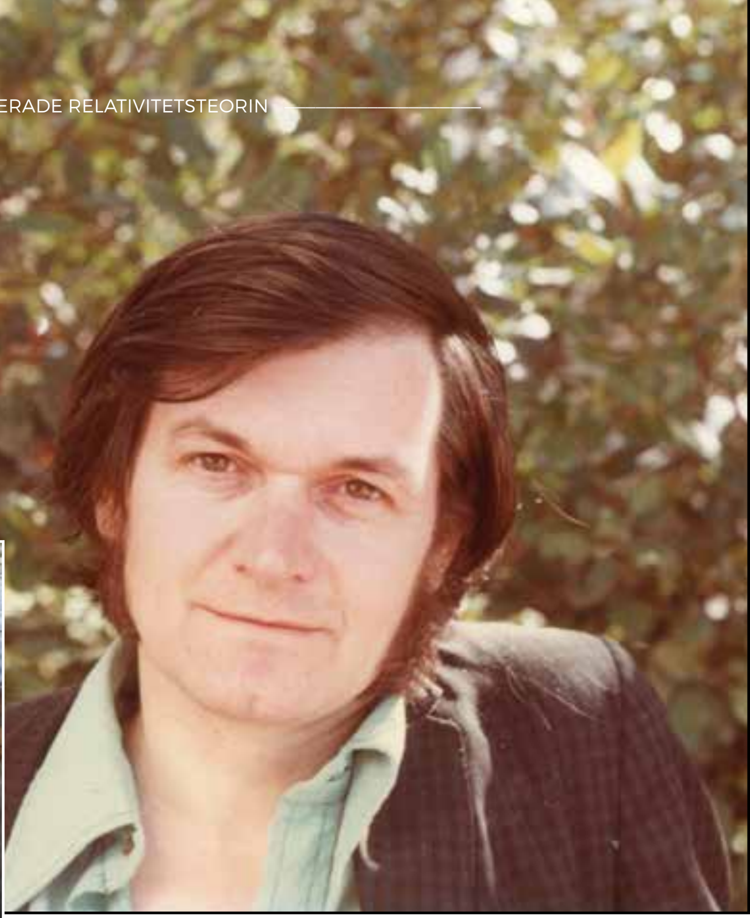


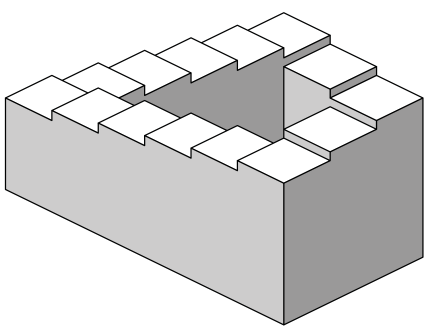
Ingemar Bengtsson
är professor i fysik vid Stockholms universitet sedan år 2000. Han har bland annat arbetat med fångade ytor och (lite grand) med Penroses twistorteori. Penrose har inspirerat honom till att studera kvantmekaniken med geometriska metoder.

Få har bidragit som Roger Penrose till vår förståelse av rum och tid och till relativitetsteorin. Ingemar Bengtsson ger oss ett porträtt av Penrose och berättar om dennes insatser. På köpet får vi lära oss om rumtid och andra grundläggande begrepp och vi får de placerade i ett relevant sammanhang.

Roger Penrose fotad i Berkeley 1978. (Foto George M. Bergman, CC BY-SA 4.0, Wikimedia Commons)

Hur Roger Penrose transformerade relativitetsteorin

Det framgick från början, när Roger Penrose började publicerade vetenskapliga artiklar, att författaren hade för avsikt att ha roligt. En av sina första skrev han 1958 tillsammans med sin far, den mångsidige psykiatern Lionel Penrose. Inspirationen kom från en utställning av Mauritz Escher på van Gogh-muséet i Amsterdam, och ledde till några nya exempel på ”omöjliga föremål”. Ett av dem kom att användas av Escher själv så småningom, nämligen den omöjliga trappan — en två-dimensionell teckning av en trappa på vilken man kan komma tillbaka till utgångspunkten trots att man hela tiden går uppåt. Många år senare skulle Rogers kontor i Oxford prydas av en tredimensionell skulptur som har den egenskapen att den omöjligt kan erhållas som projektion av ett fyrdimensionellt objekt.



Figur 1: *Den omöjliga trappan. En variant av figuren publicerades 1958 av L. Penrose och R. Penrose (By Sakurambo, Public Domain, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=794844)*

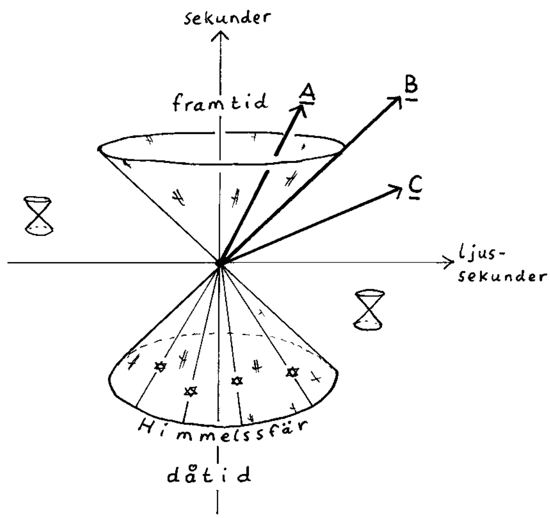
Penrose doktorerade inom algebraisk geometri i Cambridge, där hans handledare var långt från att representera ämnets moderna sida. Men lejontassen kan skymtas redan i avhandlingen, som fokuserar på nya beräkningsmetoder. Intresset för hur beräkningar utförs och kan förenklas skulle följa Penrose genom åren.

Det var kosmologen Dennis Sciama som väckte Rogers intresse för att utforska universums hemligheter. De träffades första gången i Cambridge, när Roger var på besök hos sin storebror Oliver (senare känd för sina insatser inom statistisk fysik). Rogers första artikel inom relativitetsteori kom 1959, och bevisade med ett elegant resonemang att konturen av ett klot som rör sig med nära ljusets hastighet kommer att se cirkelformad ut för alla observatörer. Detta är något oväntat för den som känner till Lorentz längdkontraktion.

Hur det började

Från sina doktorandstudier var Penrose bekant med *komplexa tal* och *konforma transformationer*, och från föreläsningar av Paul Dirac var han bekant med de *spinorer* som Dirac hade infört i fysiken för att ge en relativistisk beskrivning av den spinnande elektronen. Dessa begrepp visade sig vara nycklar till problemet med hur klotets kontur ter sig för en observatör i rörelse relativt klotet, men de kom också att bli några av Penroses viktigaste teman när han började transformera vår förståelse av rumtiden. Vi skall därför följa Penrose ett stycke in i hans arbete om det flygande klotet, tillräckligt långt för att se hur nyckelbegreppen kommer in. Därefter övergår vi till en mer översiktlig beskrivning av hur han använde dem för att revolutionera vår förståelse av relativitetsteorin.

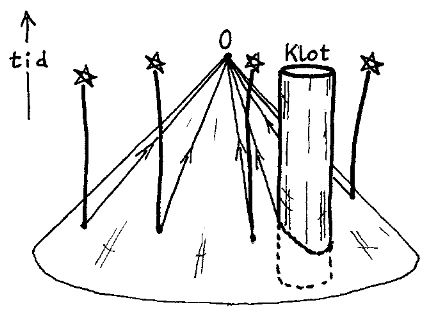
För att visualisera problemet behöver vi en karta över Minkowskis fyr-dimensionella rumtid. Vi kan lätt rita en sådan med en tidsaxel och en rumsaxel, eller med en tidsaxel och tvårumsaxlar. Egentligen skulle vi behöva tre rumsaxlar, men det får inte plats i teckningen, se Figur 2. Vi väljer skalan på axlarna så att en signal som rör sig med ljusets hastighet representeras av en linje som lutar i 45 graders vinkel mot tidsaxeln, och väljer vårt origo så att det ligger i den punkt i tid och rum där observatören befinner sig. Allt som observatören kan se (genom att detektera ljus) befinner sig på en kon i rumtiden som kallas för den bakåtriktade ljuskonen. Ett punktformat föremål bildar en så kallad världslinje i rumtiden, och ett klot bildar ett slags cylinder med tidsriktning-



Figur 2: *En karta över en del av Minkowskis rumtid. Enheterna har valts så att ljushastigheten* $c = 1$ *ljussekund/sekund. Varje punkt ligger i spetsen på en dubbelkon som kallas ljuskonen. Om vi kunde rita en fyrdimensionell bild skulle vi se att konens bas är en två dimensionell sfär som vi här kallar himmelssfären. Från varje punkt leder tre olika slags riktningar, tidsartade (***A***), ljusartade (***B***), och rumsartade (***C***). De ljusartade riktningarna ligger på ljuskonen. De tidsartade leder in i konen, och de rumsartade ut ur den. Rör man sig i en ljusartad riktning färdas man med ljusets hastighet. Ingenting kan färdas i en rumsartad riktning eftersom ingenting kan färdas snabbare än ljuset. Från en given punkt kan man bara se de händelser som utspelar sig på den bakåtriktade ljuskonen.*

en längs cylinderaxeln. Eftersom vi inte kan rita bilder med fyra dimensioner blir bilden av hur en observatör ser ett stillastående klot en lätt karikatyr, som i Figur 3.

Observatören kan naturligtvis bara avgöra riktningen av de ingående ljussignalerna, så för honom representeras deras lägen av punkter på en sfär som vi kallar himmelssfären. Figur 4, som är hämtad från en gammal astronomibok, visar hur denna sfär ter sig för en observatör i punkten O. Vi behöver en karta över himmelssfären också. För det ändamålet skall vi använda oss av en *stereografisk projektion* från sfärens sydpol, se Figur 5. Kartor förrycker alltid avstånd, men man kan visa att valet av projektionspunkt garanterar att denna karta har en egenskap som är mycket eftersträvad av kartografer, nämligen att den visar vinklar korrekt. Vi



Figur 3: *Observatören vid punkten O tar emot signaler längs sin bakåtriktade ljuskon. Observatörens tidsaxel går vertikalt. Ett stillastående klot blir en cylinder när dess utsträckning längs tidsaxeln tas med, och den skär ljuskonen enligt bilden. I vår tredimensionella bild blir cylinderns bas en cirkel, och det ser ut som att observatören ser konturen av dess skärning med ljuskonen som två punkter. I den fyrdimensionella rumtiden är cylinderns bas en två dimensionell sfär, och observatören uppfattar dess skärning med ljuskonen som en cirkel projicerad på den likaledes två dimensionella himmelssfären.*

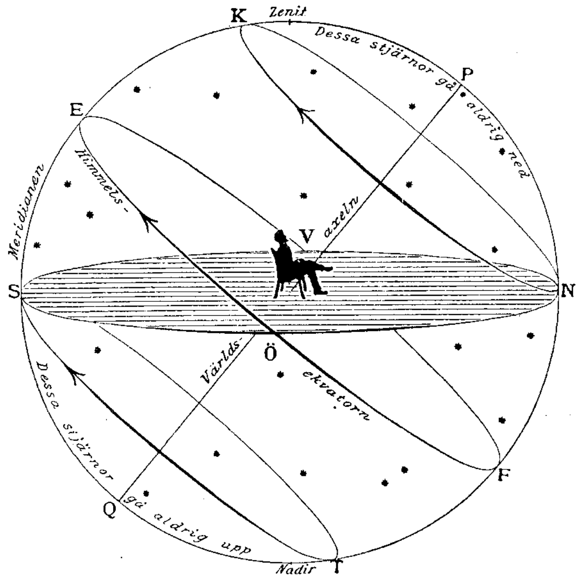
säger att avbildningen från sfären till kartplanet är *konform*.

Inom matematiken är det vanligt att uppfatta det två-dimensionella planet, med koordinater x och y, som ett *komplext talplan*, vilket betyder att man i varje punkt samlar ihop x och y till ett enda tal $z = x + \mathrm{i}y$, där i är kvadratroten av -1. Varje komplext tal har ett komplexkonjugat $z^* = x - \mathrm{i}y$, och vi ser att:

$$z^* z = (x - \mathrm{i}y)(x + \mathrm{i}y) = x^2 - \mathrm{i}^2 y^2 = x^2 + y^2 \quad ,$$

är ett positivt reellt tal. Penrose hade dessa idéer i ryggmärgen, så han var alltid beredd att införa komplexa tal även i oväntade sammanhang.

Penroses första steg var nu att relatera himmelssfären till Minkowskirummet, och det är här som Diracs spinorer visar sig användbara. För att hedra Penrose skall vi visa några av hans formler. Observatören befinner sig i origo. Ljuskonen består då av alla punkter (x_1, x_2, x_3, ct) sådana att $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = c^2 t^2$, där c är ljushastigheten. Vi kan uppfatta en sådan punkt som spetsen av en speciell slags fyrkomponentig vektor, en *ljusartad* vektor. Man kan övertyga sig om att varje ljusartad fyrvektor $\mathbf{V}$ kan beskrivas med hjälp av två komplexa tal z_0 och z_1, genom att parametrisera vektorn som



Figur 4: *Himmelssfären. från C. Rendahl och B. Söderborg, Astronomi, Norstedt & Söner 1931.*

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} ct \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} z_0^* z_0 + z_1^* z_1 \\ z_0^* z_1 + z_1^* z_0 \\ \mathrm{i} z_0^* z_1 - \mathrm{i} z_1^* z_0 \\ z_0^* z_0 - z_1^* z_1 \end{pmatrix} \quad .$$

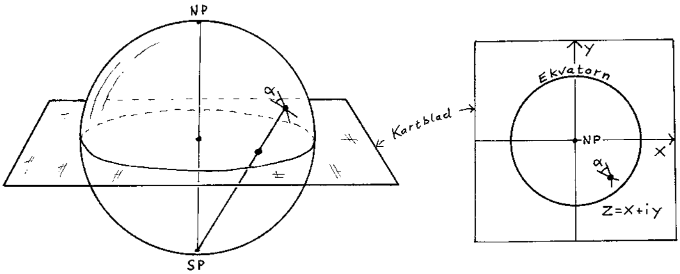
Vektorns fyra komponenter är reella tal, och:

$$\begin{aligned} &(z_0^* z_1 + z_1^* z_0)^2 \; + \; \mathrm{i}^2 (z_0^* z_1 - z_1^* z_0)^2 \; + \; (z_0^* z_0 - z_1^* z_1)^2 \\ &\qquad = 4 z_0^* z_1 z_1^* z_0 + (z_0^* z_0 - z_1^* z_1)^2 \; = \; (z_0^* z_0 + z_1^* z_1)^2 \quad . \end{aligned}$$

Villkoret $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = c^2 t^2$ är alltså automatiskt uppfyllt. De komplexa talen z_0 och z_1 kan samlas ihop till en *spinor*, det vill säga en ny slags vektor med bara två komponenter,

$$\Psi = \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \end{pmatrix} \quad .$$

Här ger en räkning resultatet att en omskalning av spinorn med ett komplext tal ger en omskalning av den ljusartade vektorn **V** med ett reellt tal, och alltså inte kommer att påverka den punkt på himmelsfären som observatören uppfattar som den punkt som ljuset kommer ifrån. Vi kan, om vi så vill, skala om spinorn med



Figur 5: *Stereografisk projektion av punkter på en sfär till punkter i ett oändligt plan. Med undantag av projektionspunkten, som vi har placerat på sydpolen, svarar varje punkt på sfären mot en unik punkt i det oändliga planet. Denna karta förrycker avstånd men tack vare att projektionspunkten ligger på sfären kommer den att visa vinklar korrekt. Man kan visa att cirklar på sfären projiceras på cirklar i planet (eller på räta linjer, om cirkeln går genom sfärens sydpol).*

en faktor $1/z_0$ utan att förändra den punkt på himmelssfären som vektorn pekar mot, så att vi arbetar med spinorer av formen

$$\Psi_0 = \frac{1}{z_0}\,\Psi = \begin{pmatrix} 1 \\ z \end{pmatrix} \quad , \quad \text{där vi definierar } z = \frac{z_1}{z_0} \quad .$$

Det komplexa talet z svarar mot en bestämd ljusartad riktning ut från origo, och därmed också mot en bestämd punkt på himmelsfären. Men det ger också en bestämd punkt i det komplexa talplanet. Det går att visa att detta är just den punkt z som förekommer på kartbladet i Figur 5.

Hur påverkas nu bilden av sfären av dess rörelse? Enligt relativitetsteorin kan vi lika gärna betrakta sfären som stillastående, och istället fråga hur den ter sig för observatörer som passerar origo med olika hastigheter. Det innebär att vi skall göra en Lorentztransformation av vår bild. Penroses idé var att det är mycket enklare att Lorentztransformera spinorerna än de ljusartade vektorerna. Det enda vi behöver veta är hur det komplexa talet z ändras av Lorentztransformationerna. Efter några eleganta manövrar fann Penrose att detta problem effektivt sett finns löst i elementära läroböcker i komplex analys. Nyckelordet, för den som vill leta där, är *Möbiustransformationer*, vilka utgör konforma transformationer av en sfär. En Möbiustransformation tar cirklar till cirklar, och problemet är löst.

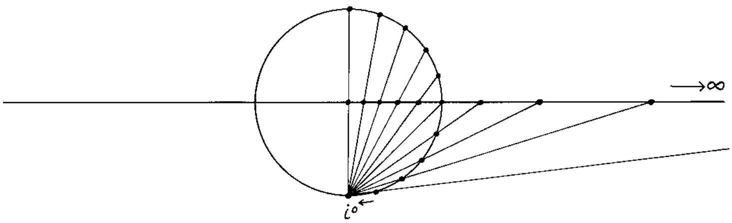
Eftersom detta inte är tänkt som en lärobok i elementär komplex analys avbryter vi diskussionen här, men med observationen att helt nya matematiska redskap nu har satts i händerna på den som vill studera Einsteins rumtid, nämligen spinorer, komplexa tal, och konforma transformationer. Och Penrose införde dessa begrepp nästan som på lek.

Oändligheten i en handflata

Einsteins ekvationer för gravitationsfältet använder en generalisering av vektorbegreppet som kallas *tensorer*. År 1960 använde Penrose komplexa tal för att skriva om Einsteins ekvationer i det spinorspråk som han just hade infört, och han kunde sedan lätt och elegant härleda ett stort antal resultat om krökta rumtider som då var nya och dåligt förstådda. Det tog ytterligare två år innan han, tillsammans med den färgstarke amerikanen Ezra Newman, presenterade den detaljerade spinorformalism som sedan dess har utgjort ett av de viktigaste redskapen för att studera gravitationsfältets *asymptotiska uppförande*.

Idén här är att man har något fenomen där starka och snabbt föränderliga gravitationsfält förekommer i någon del av rymden (till exempel en exploderande supernova, eller två kolliderande svarta hål), och man vill beskriva gravitationsfältet på stora avstånd från händelsernas centrum. Vill man ge en precis mening åt begreppet *gravitationsvågor* krävs en god kontroll över det senare, och det är det som kallas för gravitationsfältets asymptotiska uppförande. Just studiet av gravitationsvågor var också den viktigaste motiveringen för Newmans och Penroses arbete. Men deras formalism leder (med nödvändighet) till mycket långa formler, och den utvecklades vid en tid då det enda sättet att handskas med formler (hur komplicerade de än var) var att räkna för hand. Originalartikeln innehåller mycket riktigt ett berömt teckenfel, som ledde Newman till ett förment bevis att svarta hål inte kan rotera. Detta teckenfel korrigerades kort efteråt av Roy Kerr, som också presenterade en remarkabelt enkel allmän exakt lösning för roterande svarta hål.

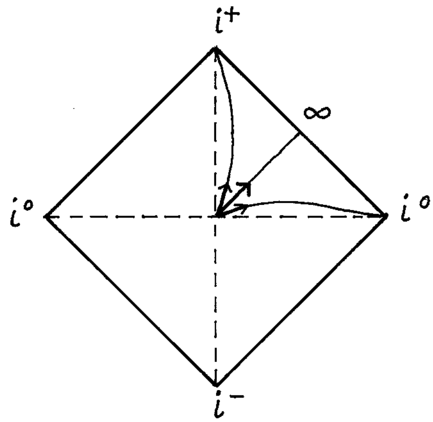
Penrose fortsatte sina studier av gravitationsfältets asymptotiska uppförande, och kombinerade det med sina idéer om konforma transformationer. Det finns ett välkänt ”trick” i komplex analys, enligt vilket man kan skaffa sig en överblick över hela det två dimensionella komplexa talplanet genom att avbilda det på en sfär som då kallas Riemannsfären. Det finns då en extra punkt på sfären som inte har någon motsvarighet i det komplexa talplanet självt, och den får representera ”oändligheten”. För att förstå detta trick tar vi en förnyad titt på den konforma stereografiska projektionen, och följer Penrose genom att se konstruktionen från andra hållet. Se Figur 6, där vi för enkelhets skull visar projektionen mellan en cirkel och en oändlig linje.



Figur 6: *Nu använder vi den stereografiska projektionen baklänges. Vi är intresserade av vad som händer oändligt långt borta på linjen. Vi avbildar linjen på cirkeln och studerar istället vad som som händer nära en helt vanlig punkt (i^0) på cirkeln. Vi kommer till samma punkt i^0 om vi går oändligt långt åt vänster på linjen.*

Antag att vi är intresserade av funktioner $f = f(x)$ definierade på linjen, och speciellt av deras asymptotiska uppförande, det vill säga hur de bär sig åt då x blir mycket stort. Om vi överför problemet till cirkeln så ser vi att vad vi är intresserade av är hur funktionen bär sig åt i närheten av en helt vanlig punkt på cirkeln. Om funktionerna är tillräckligt ”snälla” är detta ett helt överlägset sätt att studera deras asymptotiska uppförande. (Om en funktion är ”snäll” eller inte har ingenting med moral att göra. Det har att göra med om funktionen och dess derivator är kontinuerliga.)

Om man, som Penrose, försöker sig på samma trick i Minkowskirummet stöter man snabbt på det förhållandet att man kan ”gå mot oändligheten” längs tre olika slags riktningar: längs en tidsartad vektor, längs en rumsartad vektor, och längs en ljusartad vektor. Oändligheten blir då något mer än bara en enda punkt. Penrose visade att det finns tre slags oändligheter. Det finns en rumslig oändlighet som är en punkt, just som sydpolen på Riemannsfären. Det finns också en tidsoändlighet som består av en punkt i det förflutna och en i framtiden. Mellan dem finns den ljusartade oändligheten som är var man hamnar om man — i likhet med ljusstrålar och gravitationsvågor — går oändligt långt längs någon ljuskon. Vi gör nu en karta över rumtiden som inkluderar oändligheterna (till priset av att kartan kraftigt förrycker alla avstånd), och ordnar den så att ljusartade riktningar alltid lutar i 45 graders vinkel. Resultatet ser vi i Figur 7. Det kallas för ett *Penrosediagram*, i det här fallet för Minkowskirummet. Det ger en karta där man ser hela rumtiden, inte bara en liten ändlig del.



Figur 7: *Ett Penrosediagram för det två dimensionella Minkowskirummet, jämför Figur 2. Går vi från origo oändligt långt längs en rumsartad riktning hamnar vi i en oändlighetspunkt som kallas i^0. Går vi oändligt långt i en tidsartad riktning hamnar vi i framtida oändlighet i^+. Diagrammet är ritat så att ljusartade riktningar alltid lutar i 45 graders vinkel. Följer vi en ljussignal till oändligheten hamnar vi i en tredje sorts oändlighet, som bildar diagrammets rand (här markerad med "∞").*

Dessa idéer var fullständigt originella, även om Penrose senare upptäckte att det fanns en svensk föregångare, nämligen Hannes Rudberg (som sedermera blev bruksdisponent i Hällesforsnäs). De gav ett fågelperspektiv på de rumtider som kan förekomma i Einsteins teori, och nuförtiden är det nästan ovanligt att se en forskningsartikel inom området som inte innehåller ett Penrosediagram. Däremot är det fortfarande inte avgjort om en typisk lösning av Einsteins ekvationer verkligen tillåter en konform kompaktifiering med alla de egenskaper som Penrose antog. Detta har att göra med om de funktioner som förekommer i lösningen är tillräckligt "snälla". Det är i själva verket inte förrän relativt nyligen som tekniken för att studera lösningar av Einsteins ekvationer nått en sådan grad av fulländning att något meningsfullt kan sägas om detta. Det förefaller nu troligt — att döma av de arbeten som har gjorts av Demetrios Christodoulou, Helmuth Friedrich, och många andra matematiker — att den slutgiltiga bilden kommer att vara något mer komplicerad än den som Penrose antog. Men, som Helmuth Friedrich har sagt, så

> ”ändrade de bilder och metoder som Penrose införde vår syn på rumtiden på ett fundamentalt sätt, och de fortsätter och kommer att fortsätta att vara viktiga för vår förståelse av rumtidens globala struktur”.

De fångade ytorna

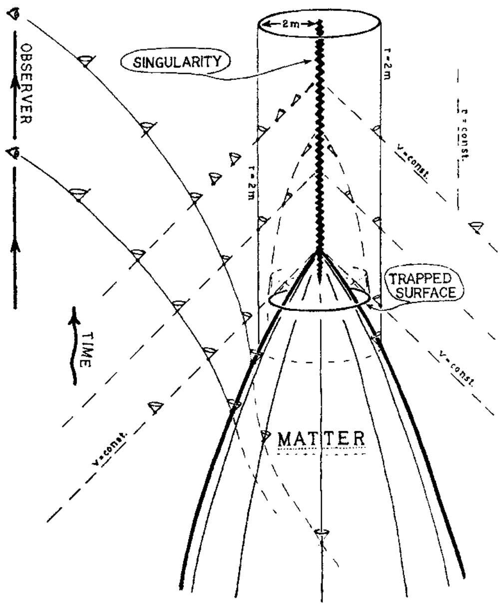
Penroses grepp om rumtidens globala struktur ledde honom till hans livs kanske bästa idé. Han fick den i London en dag år 1964 då hans livliga samspråk med relativisten Ivor Robinson avbröts i samband med att de korsade en gata. Enligt Penroses egen skildring glömde han omedelbart bort sin idé då de hade kommit över gatan och kunde fortsätta samtalet. Senare under dagen upptäckte han att han kände sig egendomligt upprymd, av någon anledning som han först inte kunde förstå. Efter en stunds introspektion kom han ihåg idén om fångade ytor och deras konsekvenser. En fångad yta är en vanlig sluten yta i rummet, som ytan av en inte nödvändigvis rund sfär. Antag att ytan plötsligt ”blixtrar till”, och sänder ut ljus både utåt och inåt. Man får då två vågfronter, en som rör sig ut från ytan och en som rör sig inåt. Man förväntar sig att den förras area växer med tiden, och att den senares krymper. Men i en krökt rumtid kan det hända att båda krymper, och då säges ytan vara *fångad*. Vad Penrose insåg när han korsade gatan var att han med hjälp av tekniker som han hade utvecklat för att förstå gravitationsfältets asymptotiska uppförande skulle kunna bevisa att om en rumtid innehåller en fångad yta så måste det med nödvändighet uppstå en *singularitet* i rumtiden i ytans framtid.

Det var en sensationell insikt. Vid den här tidpunkten hade relativister börjat studera gravitationellt kollapsande stjärnor på allvar. Vad man hade att utgå från var en exakt lösning av Einsteins ekvationer som beskrev hur ett sfäriskt symmetriskt moln av damm (uppbyggt av partiklar som påverkar varandra endast via gravitationskraften) kollapsar till en singulär ”punkt” där tätheten blir oändlig och rumtidens krökning också blir oändlig. Men vad händer om en stjärna från början avviker något från en sfärisk form? Kommer avvikelserna då att växa, och singulariteten på något sätt att undvikas, vilket kanske händer ändå om stjärnmaterian utvecklar ett tryck som kan motverka kollapsen? På olika håll i världen räknade man så gott man kunde på problemet, med diverse komplicerade approximationsmetoder. En rysk grupp hade kommit längst, och menade att singulariteten nog kunde undvikas, men saken var långt från klar. Det teorem som Penrose bevisade avgjorde saken i ett slag. Det finns fångade ytor i den exakta lösningen. De fångade ytorna definieras av olikheter, och de kommer att fortsätta att vara fångade även om begynnelsedata avviker en smula från den exakta lösningen. Då tar Penroses teorem över och visar att singulariteten är oundviklig.

På så sätt kom Penroses singularitetsteorem att bilda epok för teorin. Tillsammans med en yngre forskare från Cambridge vid namn Stephen Hawking utarbetade Penrose förfinade versioner av teoremet. Hawking fann också en helt ny tillämpning av dem. De förfinade versionerna kan användas ”baklänges i tiden” för att argumentera att universum måste ha börjat från en singularitet. ”Big Bang” var med nödvändighet en singularitet. Samtidigt reser teoremen många frågor. En av dem är vad en singularitet egentligen är för något? Det verkar troligt att rumtidens krökning går mot oändligheten när man närmar sig singulariteten, men det är inte riktigt det som teoremen säger. De säger att singulariteten är ett slags rand till rumtiden, belägen på ändligt tidsavstånd från lämpliga observatörer. Rumtiden tar helt enkelt slut där — åtminstone enligt Einsteins relativitetsteori, som är den bästa teori vi har. Det är alltså viktigt att förstå att singulariteten inte är en punkt inuti rumtiden — den bildar en gräns utöver vilken framtiden inte existerar.

De svarta hålen

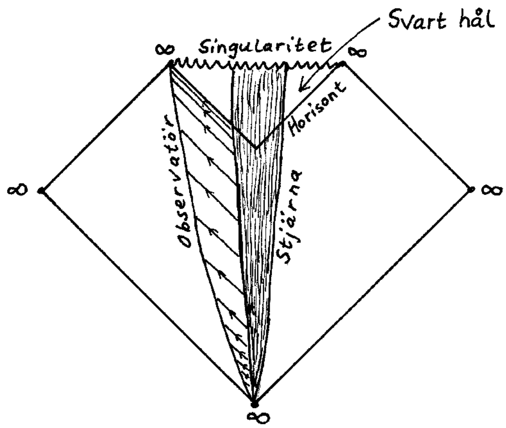
En annan fråga är om det ute i universum har bildats singulariteter som kan observeras från jorden, och i så fall vad man då skulle se? Låt oss titta på den exakta lösningen som beskriver en sfäriskt symmetrisk gravitationskollaps. Se Figur 8, som är en impressionistisk bild av en krökt rumtid i vilken krökningen manifesteras av att ljuskonerna lutar inåt. Mycket riktigt avslutas rumtiden med en singularitet, men runt det område av rumtiden där den dyker upp har det bildats ett *svart hål*. Här definierar vi ett svart hål som en del av rumtiden från vilken inga signaler kan sändas ut till oändligheten. Det svarta hålets yttre gräns kallas för dess *händelsehorisont*, och bilden visar hur ljuskonerna vid händelshorisonten lutar



Figur 8: *Rumtidsbild av en symmetrisk gravitationskollaps. Tiden går mer eller mindre uppåt i bilden, men denna rumtid är krökt på ett sätt som får ljuskonerna att luta inåt. Tidsartade riktningar, längs vilka en astronaut kan färdas, ligger inuti ljuskonerna. Detta gör att singulariteten ligger i framtiden. Vid $r = 2m$ går "utåtriktade" ljussignaler rätt upp i bilden. En händelsehorisont har alltså bildats. En astronaut som passerar denna horisont kan inte komma ut igen, och hennes framtid upphör vid singulariteten. De fångade ytorna ("trapped surfaces" på engelska) kommer att vara kvar även om man släpper lite på symmetrin, och singulariteten är därmed oundviklig. Från R. Penrose:* On gravitational collapse*, Contemporary Physics Vol. 1, Trieste Symposium 1968.*

så mycket att signaler inte kan passera den i utåtgående riktning. Bilden blir mycket klarare om vi ritar ett Penrosediagram av denna rumtid, se Figur 9.

Vi ser att singulariteten ligger gömd inuti det svarta hålet. Astronomen, som befinner sig långt borta, kan inte se den. Den kan faktiskt inte ses från det svarta hålets insida heller. En astronaut som har hamnat i det svarta hålet kommer i en snar framtid (mätt med hennes egen klocka) att träffa singulariteten, men inga signaler från densamma når henne före framkomsten. Teorin säger ingenting om vad som händer när hon kommer fram, och för övrigt har hon nog slitits sönder av starka tidvattenkrafter redan innan dess.



Figur 9: *Ett annat sätt att se på sfäriskt symmetrisk gravitationskollaps. Istället för den lätt impressionistiska Figur 8 ritar vi ett konformt Penrose-diagram, där avstånden är förryckta men ljussignaler alltid utväxlas längs linjer som lutar 45 grader. Speciellt lutar händelsehorisonten i 45 graders vinkel. Vi ser nu tydligt att singulariteten inte ligger i centrum av stjärnan, den ligger i (eller avslutar) dess framtid. Det svarta hålet består av den del av rumtiden från vilken inga signaler kan nå oändligheten. Observatören befinner sig utanför det svarta hålet och rör sig längs en världslinje som går från förfluten oändlighet till framtida oändlighet. Signaler som skickas från punkter inne i det svarta hålet kommer att träffa singulariteten, och når aldrig observatören.*

Men nu har vi förlitat oss på en exakt lösning av fältekvationerna. Frågan är om detta alltid händer, så att ingen av de många singulariteter som uppstår i universum någonsin kan observeras? Penrose drog (en smula motvilligt, förefaller det) slutsatsen att svaret på den frågan förmodligen är "ja". Detta kallas för hypotesen om *kosmisk censur*. Ett bevis för den hypotesen har varit något av en helig graal för alla relativister sedan dess, men hittills har alla bevis varit begränsade till enkla specialfall. Givet att Penrose har visat att uppkomsten av singulariteter är en robust konsekvens av Einsteins teori, så skulle ett bevis för kosmisk censur betyda att svarta hål också är en sådan robust konsekvens.

Om man antar att kosmisk censur gäller kan man använda Einsteins teori för att härleda många intressanta resultat om svarta hål. Ett av dem säger att alla fångade ytor befinner sig helt och hållet bakom någon händelsehorisont. De kan alltså aldrig observeras från utsidan av de svarta hålen, men de observeras på sätt och vis av dagens relativister. Under de senaste två decennierna har man nämligen äntligen lärt sig hur man på (stora) datorer numeriskt kan simulera hur Einsteins ekvationer leder till gravitationskollaps. Detta är av stor betydelse när man vill förutsäga vad som kan observeras i form av gravitationsvågor och annat. Det är emellertid svårt att avgöra från de numeriska beräkningarna om ett svart hål verkligen har bildats. Mer precist är det svårt att avgöra var händelsehorisonten ligger, eftersom detta kräver att man får fram lösningen för alla tider. Istället har man utvecklat effektiva metoder för att detektera fångade ytor i de numeriska lösningarna, och givet att man tror på kosmisk censur kan man då dra slutsatsen att det finns en händelsehorisont och alltså ett svart hål som omger de fångade ytorna.

Ett annat slående resultat som följer av kosmisk censur är att svarta hål aldrig krymper. Mer precist så visade Penrose tillsammans med en av sina studenter att händelsehorisontens yta aldrig kan minska med tiden. Samma resultat visades också av Hawking, och det har blivit en hörnsten i teorin. Hawking gick vidare och fann att det finns kvantmekaniska effekter som gör att svarta hål utsänder strålning, så att de faktiskt krymper med tiden. Men detta ligger utanför ramen för Einsteins klassiska teori, och har inga omedelbara konsekvenser för astrofysiken. Det skulle ta omkring 10^{70} sekunder för ett svart hål som väger en solmassa att försvinna på detta sätt, och det har hittills inte gått mer än 10^{17} sekunder sedan Big Bang.

Medan teoretiker som Penrose, Hawking, och många andra utvecklade teorin för svarta hål kom astronomerna till insikt om att dessa nästan säkert förekommer i stort antal ute i universum, att de där har flera observerbara kännetecken, och att de är nödvändiga för att förklara många av de dramatiska observationer som har gjorts från jorden. Här gav Penrose ett viktigt bidrag när han påpekade att energi kan utvinnas från roterande svarta hål. Man kan ana sig till hur detta går till om man betraktar en formel för Kerrs roterande svarta hål som först skrevs ner av relativisten Larry Smarr, nämligen:

$$GM = \frac{c^2}{2}\sqrt{\frac{A}{4\pi} + \frac{16\pi J^2}{A}} \quad ,$$

där G är Newtons gravitationskonstant, M är det svarta hålets massa, A ytan på dess händelsehorisont, och J dess impulsmoment (ett mått på hur mycket det roterar). Vi utgår ifrån att ytan

A bara kan växa. Icke desto mindre antyder formeln att det svarta hålets totala energi $E = Mc^2$ skulle kunna minska om det fanns något sätt att minska dess impulsmoment. Penrose fann, till allmän överraskning, att en sådan process är möjlig. Astrofysikerna Roger Blandford och Roman Znajek visade snart att realistiska versioner av Penroses mekanism är tänkbara. Mer än så, ett roterande svart hål kan avge oerhörda mängder energi på detta sätt. En vätebomb förvandlar en del av sin massa till utstrålad energi, men bara en liten del, så att en vätebomb är ett mycket harmlöst objekt i jämförelse med ett roterande svart hål. Det anses numera allmänt att de energirika jetstrålar som kommer från aktiva galaxkärnor får sin energi via en Penrose-process.

Framtidsutsikter

Men låt oss lämna astrofysiken och gå tillbaka till utgångspunkten från 1959. Den två-komponentiga spinor vi skrev ner påminner om hur man kvantmekaniskt beskriver en elektron med spinn $1/2$. Matematiken bakom kvantmekaniken tycks nudda matematiken för fyrdimensionella rumtider. Denna observation var en av utgångspunkterna för Penroses *twistorteori*. Ambitionen var, och är, att skriva om den klassiska relativitetsteorin på ett sätt som skall göra den korrekta kvantgravitationsteorin synlig. Hittills har varken detta eller något annat sätt att förena relativitetsteori och kvantmekanik lyckats. De spekulationer om elementarpartikelfysiken som Penrose leddes till av sin twistorteori har heller inte slagit in, som man kan se i den science-fiction-roman som Penrose bidrog till. Den heter *White Mars*, skrevs i samarbete med Brian Aldiss, och är inte någon av herrarnas bästa verk. Det måste dock tilläggas att twistorteorin har spelat en viktig roll i ren matematik, och också att dess beräkningsmetoder på senare år har visat sig mycket användbara inom kvantfältteorin. Så det kan tänkas att bilden ändras så småningom.

Angående kvantmekaniken som sådan delar Penrose Einsteins åsikt att den inte kan vara fullständig. Enligt Penrose behöver vi en bättre teori bland annat för att förstå det mänskliga medvetandet. Trots sitt väl dokumenterade intresse för beräkningar menar han att det som krävs är en teori som inte kan fångas av datoralgoritmer. Också här gäller det nog att osvuret är bäst när det gäller att bedöma Penroses mer spekulativa teorier.

Det finns något att tillägga: Jag tror att alla som har träffat Roger Penrose är överens om att han är respektfull och sympatisk, och att han i nästan varje samtal lyckas förmedla något av sin entusiasm för att förstå universums hemligheter. För oss som inte så ofta åtnjuter förmånen av sådana samtal finns Penroses många populärvetenskapliga böcker att tillgå .

❖

Vidare läsning

Holst, S. (2006). *Rumtid — en introduktion till Einsteins relativitetsteori*. Studentlitteratur.

En rikt illustrerad bok skriven för läsare utan förkunskaper.

Penrose, R. (1978). The Geometry of the Universe. I L. A. Steen (Red.), *Mathematics Today. Twelve Informal Essays*. Springer.

En mästerlig skiss av hur man matematiskt beskriver rumtidens geometri.

Penrose, R. (1997). *The Large, the Small and the Human Mind*. Cambridge University Press.

Penroses kortaste populärvetenskapliga bok. Full av spekulativa idéer.

Penrose, R. (2004). *The Road to Reality. A Complete Guide to the Laws of the Universe*. Jonathan Cape.

Penroses längsta populärvetenskapliga bok. Titeln är ganska rättvisande.